OMM - Ekonomski modeli

May 28, 2026

Modeli za određivanje optimalne proizvodnje i cene proizvoda koji donose maksimalni profit.

- **Monopol** - jedan ekskluzivni proizvođači/prodavac nekog proizvoda (npr. patentiran proizvod).
- **Duopol** - ekonomsko stanje kada postoje 2 proizvođača/prodavca iste robe.
- **Oligopol** - više od 2 (ali ne preterano veliki broj) proizvođača/prodavaca iste robe.
- **Savršena konkurencija** - puno proizvođača/prodavaca iste robe.

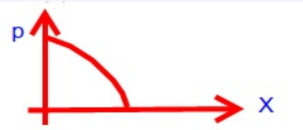
Veza cene i količine robe na tržištu

- X - količina robe
- p - cena robe
- **Funkcija tražnje** - Količina prodate robe funkcionalno zavisi od cene robe: $X = t(p)$:

  - monotono opadajuća kriva
  - seče X-osu u maksimalnoj količini robe koja može da se proda (pokloni) po nultoj ceni (ograničeno)
  - seče p-osu u maksimalnoj ceni po kojoj roba može da se proda

Koju cenu robe da postavimo da bi do u zadatom vremenskom intervalu prodali **sve**?

- Funkcija tražnje je monotona funkcija $\rightarrow$ postoji inverzna funkcija.
- **Inverzna funkcija tražnje** $p = p(X)$



  - monotono opadajuća funkcija
  - premala cena - prodaće se sve pre isteka vremenskog perioda, prevelika cena - ostaće neprodate robe

MONOPOL

Za neku robu postoji samo jedan proizvođač. Zadatak je maksimizovati profit (prihod umanjen za trošak)

Funkcija profita:

$$\boxed{\Pi(X) = R(X) - C(X) = p(X) \cdot X - C(X)}$$

- X - količina robe
- $R(X)$ - funkcija prihoda
- $C(X)$ - funkcija troškova (tehnologija, materijal, radna snaga, porezi...)
- $p(X)$ - inverzna funkcija tražnje

Za malo X malo je i $\Pi(X)$. Za veliko X, $\Pi(X)$ je opet malo. Optimalno $\Pi(X)$ je negde u sredini.

Uz pretpostavku da su $p(X)$ i $C(X)$ neprekidne i diferencijabilne, funkcija $\Pi(X)$ dostiže svoj maksimum u stacionarnoj tački:

$$\Pi(X) = 0$$
$$\Pi'(X) = R'(X) - C'(X) = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{R'(X) = C'(X)}$$

$R'(X)$ - "brzina" prihodovanja (**granični prihod**)
$C'(X)$ - "brzina" trošenja (**granični trošak**).

Primer

Inverzna funkcija tražnje je linearna funkcija:
$p(X) = a - bX$
$a, b > 0$

Troškovi se sastoje od fiksnog troška d i varijabilnog troška e:
$C(X) = d + eX$

$$\begin{aligned}\Pi(X) &= p(X) \cdot X - C(X) \\ &= (a - bX) \cdot X - (d + eX)\end{aligned}$$

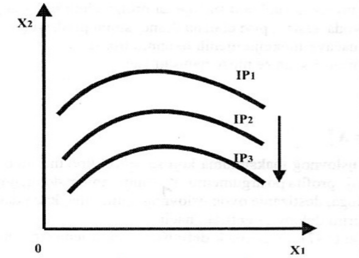
$b > 0$ pa je $\Pi(X)$ konkavna kvadratna funkcija i dostiže svoj maksimum u tački X_o za koju:
$\frac{d\Pi}{dX} = a - 2bX - e = 0$
$$\Rightarrow \boxed{X_o = \frac{a - e}{2b}} \Rightarrow \boxed{\Pi_o = \Pi(X_o) = \frac{(a - e)^2}{4b} - d}$$

Kurnoov DUOPOL

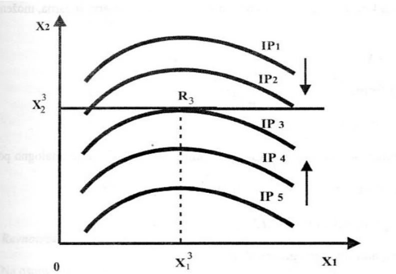
(Duopol) Postoje 2 proizvođača iste robe.
(Kurno) Svaki proizvođač se ponaša oportunistički.

- X_1 - količina robe prvog proizvođača
- X_2 - količina robe drugog proizvođača
- $X_1 + X_2$ - ukupna količina robe na tržištu
- $p(X_1 + X_2)$ - cena robe (inverzna funkcija tražnje)
- Prihodi oba proizvođača:
  $\Pi_1 = p(X_1 + X_2) \cdot X_1 - C_1(X_1)$
  $\Pi_2 = p(X_1 + X_2) \cdot X_2 - C_2(X_2)$

Prvi proizvođač se ponaša oportunistički:
za fiksirano X_2: $\frac{\partial \Pi_1}{\partial X_1} = 0 \Rightarrow \boxed{X_1 = r_1(X_2)}$ (**funkcija reakcije** za prvu firmu)



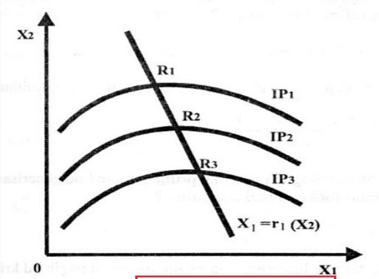
Slika 18. Izoprofitne krive firme 1



Slika 19. Optimalna ponuda firme 1, za datu ponudu firme 2

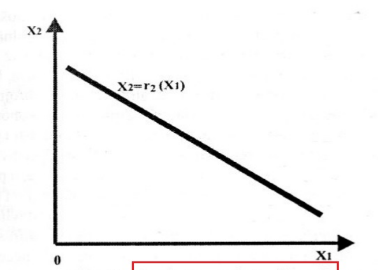
Izoprofitne krive - krive na kojima je u svakoj tački profit isti (IP1, IP2,...).
Niža kriva (na slici) = veći profit tj. IP3>IP2>IP1 (X_2 je manje, a X_1 isto, što znači da je $X_1 + X_2$ manje pa je zato cena veća. Pošto je X1 isto (troškovi isti), a cena veća, to je veći profit za prvu firmu).

Za različite izoprofitne krive, imamo različite preseke sa horizontalama. Povezivanjem dobijamo funkciju reakcije prve firme.



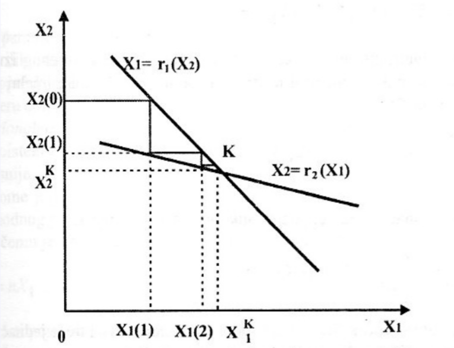
Slika 20. Funkcija reakcije firme 1

Drugi proizvođač se takođe ponaša oportunistički:
za fiksirano X_1: $\frac{\partial \Pi_2}{\partial X_2} = 0 \Rightarrow \boxed{X_2 = r_2(X_1)}$ (**funkcija reakcije** za drugu firmu)



Slika 21. Funkcija reakcije firme 2

Šta se dešava posle niza (oportunističkih) prilagođavanja oba proizvođača?



Slika 22. Ravnoteža Kurnoovog duopola i njena stabilnost

Kurno je dokazao da će niz prilagođavanja da konvergira ka presečnoj tački $K = (X_1^K, X_2^K)$ (**tačka ravnoteže Kurnoovog duopola**) i dokazao je stabilnost tog rešenja.

U tački $K = (X_1^K, X_2^K)$ važi i $\frac{\partial \Pi_1}{\partial X_1} = 0$ i $\frac{\partial \Pi_2}{\partial X_2} = 0$.

Primer

Inverzna funkcija tražnje je linearna funkcija (isto tržiste, isti proizvod):
$p(X) = a - bX, \quad a, b > 0$

Troškovi proizvodnje se sastoje od fiksnih troškova d_1, d_2 *i varijabilnih troškova* e_1, e_2*:*
$C_1(X) = d_1 + e_1 X$
$C_2(X) = d_2 + e_2 X$

$$\begin{cases} \Pi_1 = (a - b(X_1 + X_2)) \cdot X_1 - (d_1 + e_1 X_1) \\ \Pi_2 = (a - b(X_1 + X_2)) \cdot X_2 - (d_2 + e_2 X_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_1}{\partial X_1} = 0 \\ \frac{\partial \Pi_2}{\partial X_2} = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{a - e_1}{2b} - \frac{X_2}{2} \equiv r_1(X_2) \\ X_2 = \frac{a - e_2}{2b} - \frac{X_1}{2} \equiv r_2(X_1) \end{cases}$$

Presek prave $r_1(X_2)$ sa pravom $r_2(X_1)$ je
tačka Kurnoove ravnoteže (X_1^K, X_2^K):

$$\boxed{X_1^K = \frac{a - 2e_1 + e_2}{3b}, \quad X_2^K = \frac{a - 2e_2 + e_1}{3b}}$$

Optimalan profit: $\Pi_1^K = \Pi_1(X_1^K), \Pi_2^K = \Pi_2(X_2^K)$

$$\boxed{\Pi_1^K = \frac{(a - 2e_1 + e_2)^2}{9b} - d_1, \quad \Pi_2^K = \frac{(a - 2e_1 + e_2)^2}{9b} - d_2}$$

Kome je dobar monopol (proizvođaču, kupcu, državi)? MONOPOL vs (Kurnoov) DUOPOL

- Linerne funkcije troškova i inverzne funkcije tražnje.
- a i b su vezane za tržište tako da su isti i u monopolu i u duopolu.
- Pretpostavimo $e_1 = e_2 = e$ - koriste istu tehnologiju, isti marginalni troškovi...
- Pretpostavimo $d_1 = d_2 = d^*(\neq d$ u opštem slučaju).
- $d/2 \leq d^* \leq d$

Ravnotežna tačka Kurnoovog duopola:
$X_1^K = \frac{a-2e_1+e_2}{3b} = \frac{a-e}{3b}, \quad X_2^K = \frac{a-2e_2+e_1}{3b} = \frac{a-e}{3b} \quad \Rightarrow X_1^K = X_2^K$ (isti)
Profiti:
$\Pi_1 = \Pi_2 = \frac{(a-e)^2}{9b} - d^*$ (isti)

	X_1	X_2	$X_1 + X_2$	$p(X_1 + X_2)$	Π_1	Π_2
monopol	$\frac{a-e}{2b}$	–	$\frac{a-e}{2b}$	$\frac{a+e}{2}$	$\frac{(a-e)^2}{4b} - d$	–
Kurno	$\frac{a-e}{3b}$	$\frac{a-e}{3b}$	$\frac{a-e}{\frac{3}{2}b}$	$\frac{a+2e}{3}$	$\frac{(a-e)^2}{9b} - d^*$	$\frac{(a-e)^2}{9b} - d^*$

Zaključak:

- $X^M > X^K_{1,2}$
- $X^K_1 + X^K_2 > X^M$
- $p(X^K_1 + X^K_2) < p(X^M)$ (zbog monotonog opadanja inverzne funkcije tražnje)
  Više ljudi je kupilo robu po manjoj ceni!
- Ako su d i d^* relativno mali: $\Pi^M > \Pi^K_1 + \Pi^K_2$

Štakelbergov duopol

Kod Kurnoovog modela obe firme ispoljavaju sledbeničko ponašanje - kada jedna firma nešto promeni, druga prilagodi proizvodnju da bi maksimizirala profit pod pretpostavkom da prva dalje ne menja proizvodnju. Ovo je jedna vrsta kratkovidog predviđanja.

Ukoliko prva firma (lider) ustanovi da druga firma (sledbenik) uvek ispoljava sledbeničko ponašanje, to može iskoristiti u svoju korist.

Znajući funkciju reakcije druge firme $r_2(X_1)$, prva firma može da maksimizira svoj profit i prođe bolje na tržištu.

Umesto: $\Pi_1 = p(X_1 + X_2) \cdot X_1 - C_1(X_1) \to \max$
Lider: $\Pi_1 = p(X_1 + r_2(X_1)) \cdot X_1 - C_1(X_1) \to \max$

Primer

Linearan primer:
$p(X) = a - bX, \quad a, b > 0\,, \; C_1(X) = d_1 + e_1 X, \quad C_2(X) = d_2 + e_2 X$

$$\begin{cases} \Pi_1 = p(X_1 + r_2(X_1)) \cdot X_1 - C_1(X_1) \\ \Pi_2 = p(X_1 + X_2) \cdot X_2 - C_2(X_2) \\ \qquad = p(a - b(X_1 + X_2)) \cdot X_2 - (d_2 + e_2 X_2) \end{cases}$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial X_2} = 0 \underset{\text{(Kurno)}}{\overset{\text{sledbenik}}{\Longrightarrow}} X_2 = \frac{a - e_2}{2b} - \frac{X_1}{2} = \frac{a - e_2 - bX_1}{2b} \equiv r_2(X_1)$$

$$\Pi_1 = (a - b(X_1 + \frac{a - e_2 - bX_1}{2b})) \cdot X_1 - (d_1 + e_1 X_1) \to \max$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial X_1} = 0$$

(X_1^S, X_2^S) je tačka Štakelbergove ravnoteže

$$\boxed{X_1^S = \frac{a - 2e_1 + e_2}{2b}, \quad X_2^S = \frac{a + 2e_1 - 3e_2}{4b}}$$

Optimalan profit: $\Pi_1^S = \Pi_1(X_1^S), \Pi_2^S = \Pi_2(X_2^S)$

$$\boxed{\Pi_1^S = \frac{(a - 2e_1 + e_2)^2}{8b} - d_1, \quad \Pi_2^S = \frac{(a + 2e_1 - 3e_2)^2}{16b} - d_2}$$

Šta je za koga bolje?

	X_1	X_2	X_1+X_2	$p(X_1+X_2)$	Π_1	Π_2
monopol	$\frac{a-e}{2b}$	–	$\frac{a-e}{2b}$	$\frac{a+e}{2}$	$\frac{(a-e)^2}{4b}-d$	–
Kurno	$\frac{a-e}{3b}$	$\frac{a-e}{3b}$	$\frac{a-e}{\frac{3}{2}b}$	$\frac{a+2e}{3}$	$\frac{(a-e)^2}{9b}-d^*$	$\frac{(a-e)^2}{9b}-d^*$
Štakelberg	$\frac{a-e}{2b}$	$\frac{a-e}{4b}$	$\frac{a-e}{\frac{4}{3}b}$	$\frac{a+3e}{4}$	$\frac{(a-e)^2}{8b}-d^*$	$\frac{(a-e)^2}{16b}-d^*$

Zaključak:

- Lider proizvodi duplo više nego sledbenik ($X_1^S = 2X_2^S$), ali i izarađuje (skoro) duplo više ($\Pi_1^S \approx 2\Pi_2^S$).
- Optimalna proizvodnja kod Štaklberovog lidera je ista kao i kod monopoliste ($X_1^S = X^M$).
- Ako se kod monopoliste javi nova firma kao konkurencija, on u liderskoj ulozi održava istu proizvodnju. Međutim, profit će mu se smanjiti (skoro) duplo ($2\Pi_1^S \approx \Pi^M$), ali i dalje će zarađivati (malo) više nego da je u Kurnoovoj ravnoteži ($\Pi_1^S > \Pi_1^K$).

Boulijev duopol

Obe firme pretpostavljaju (pogrešno) da će se ona druga ponašati sledbenički, pa obe pokušavaju da budu lideri.

"Lider" 1: $\Pi_1 = p(X_1 + r_2(X_2)) \cdot X_1 - C_1(X_1)$
"Lider" 2: $\Pi_2 = p(X_1 + r_1(X_1)) \cdot X_2 - C_2(X_2)$

Tačka (X_1^B, X_2^B) nije stabilna jer obe firme imaju pogrešne pretpostavke

$$\boxed{X_1^B = \frac{a - 2e_1 + e_2}{2b}, \quad X_2^B = \frac{a + e_1 - 2e_2}{2b}}$$

Profit:

$$\boxed{\Pi_1^B = \frac{e_2 - e_1}{2} - d_1, \quad \Pi_2^B = \frac{e_1 - e_2}{2} - d_2}$$

Šta je za koga bolje?

	X_1	X_2	X_1+X_2	$p(X_1+X_2)$	Π_1	Π_2
monopol	$\frac{a-e}{2b}$	$-$	$\frac{a-e}{2b}$	$\frac{a+e}{2}$	$\frac{(a-e)^2}{4b}-d$	$-$
Kurno	$\frac{a-e}{3b}$	$\frac{a-e}{3b}$	$\frac{a-e}{\frac{3}{2}b}$	$\frac{a+2e}{3}$	$\frac{(a-e)^2}{9b}-d^*$	$\frac{(a-e)^2}{9b}-d^*$
Štakelberg	$\frac{a-e}{2b}$	$\frac{a-e}{4b}$	$\frac{a-e}{\frac{4}{3}b}$	$\frac{a+3e}{4}$	$\frac{(a-e)^2}{8b}-d^*$	$\frac{(a-e)^2}{16b}-d^*$
Boulije	$\frac{a-e}{2b}$	$\frac{a-e}{2b}$	$\frac{a-e}{b}$	e	$-d^*$	$-d^*$

Zaključak:

- Dolazi do prekomerne proizvodnje ($X_1^B+X_2^B>\max\{X^M, X_1^K+X_2^K, X_1^S+X_2^S\}$), pada cene, ...
- U slučaju da obe firme pokušavaju da budu lideri, bar jedna ili obe će biti u gubicima ($\Pi^B<0$).
- Ukoliko ni jedna firma ne pristane na sledbeničko ponašanje (koje donosi duplo manji profit od liderskog), tada sledi trgovinski rat do propasti jedne firme, obično one koja ima veće troškove proizvodnje. Firma koja ostaje na tržištu preuzima monopolski položaj sa mnogo većim profitom.

Dogovor u duopolu/Koluzija/Kartel (protivzakonito)

Dogovor dve firme da nastupaju na tržištu kao jedna, deleći profit monopolskog zajedničkog ponašanja.

Neka su se se dogovorili za jednaku proizvodnju: $X_1 = X_2 = X$
$\Pi_1 = p(2X) \cdot X - C_1(X)$
$\Pi_2 = p(2X) \cdot X - C_2(X)$
$\Pi_1 + \Pi_2 = p(2X) \cdot 2X - (C_1(X) + C_2(X)) \longrightarrow \max$

Optimalna proizvodnja obe firme

$$\boxed{X_1^D = X_2^D = X = \frac{a - \frac{e_1 + e_2}{2}}{4b}}$$

Optimalan profit:

$$\boxed{\Pi_1^D = \frac{(a - e_1)^2 - (\frac{e_1 - e_2}{2})^2}{8b} - d_1, \quad \Pi_2^D = \frac{(a - e_2)^2 - (\frac{e_1 - e_2}{2})^2}{8b} - d_2}$$

Šta je za koga bolje?

	X_1	X_2	$X_1 + X_2$	$p(X_1 + X_2)$	Π_1	Π_2
monopol	$\frac{a-e}{2b}$	–	$\frac{a-e}{2b}$	$\frac{a+e}{2}$	$\frac{(a-e)^2}{4b} - d$	–
Kurno	$\frac{a-e}{3b}$	$\frac{a-e}{3b}$	$\frac{a-e}{\frac{3}{2}b}$	$\frac{a+2e}{3}$	$\frac{(a-e)^2}{9b} - d^*$	$\frac{(a-e)^2}{9b} - d^*$
Štakelberg	$\frac{a-e}{2b}$	$\frac{a-e}{4b}$	$\frac{a-e}{\frac{4}{3}b}$	$\frac{a+3e}{4}$	$\frac{(a-e)^2}{8b} - d^*$	$\frac{(a-e)^2}{16b} - d^*$
Boulije	$\frac{a-e}{2b}$	$\frac{a-e}{2b}$	$\frac{a-e}{b}$	e	$-d^*$	$-d^*$
dogovor	$\frac{a-e}{4b}$	$\frac{a-e}{4b}$	$\frac{a-e}{2b}$	$\frac{a+e}{2}$	$\frac{(a-e)^2}{8b} - d^*$	$\frac{(a-e)^2}{8b} - d^*$

Zaključak:

- Kod dogovora dve firme obe imaju profit kao lider u Štaklbergovom modelu ($\Pi_1^D = \Pi_2^D = \Pi_1^S$), dok u zbiru im je profit kao da je jedan monopolista ($\Pi_1^D + \Pi_2^D = \Pi^M$). Taj profit je desetak procenata veći nego kod Kurnoove ravnoteže, ali se rizikuju zakonske kazne.

$$\Pi^M > \Pi_1^D = \Pi_1^S > \Pi_1^K > \Pi_1^B$$

$$\Pi^M > \Pi_2^D > \Pi_2^K > \Pi_2^S > \Pi_2^B$$

Iz ugla sledbenika:

- Sledbenik koji nije zadovoljan svojim profitom, duplo manjim nego kod druge firme lidera, mogućnosti su mu da
  - započne trgovinski rat
  - pretnjom trgovinskim ratom obe firme počnu da se ponašaju sledbenički i ostvare Kurnoovu ravnotežu na zakonit način
  - protivzakonito naprave dogovor.

Iz ugla lidera:

- Tada, opcije lidera su da
  - uđe u neizvestan trgovinski rat
  - promeni ponašanje u sledbeničko i u Kurnoovoj ravnoteži ostvari neznatno manji ali zakonit profit
  - napravi protivzakonit dogovor kojim zadržava isti profit.